2 Fuzzymengen

2.1 Klassische Mengen

"George Harrison, John Lennon, Paul McCartney und Ringo Starr bilden die Menge der Beatles." Mit diesen Worten führte mein Lehrer uns in die Mengenlehre ein. Beatles und Mengenlehre hatten wie eine große Welle die Schulen überschwappt. Inzwischen sind ungefähr 30 Jahre vergangen und um beide ist es stiller geworden: Die Beatles gibt es nicht mehr und die Mengenlehre führt nur noch ein Schattendasein.

Ist die Mengenlehre wirklich so unbedeutend geworden?

2.1 Die Beatles

Nein! Da gibt es eine Gruppe von Forschern, die sich Fuzzy-Theoretiker nennen. Sie haben es sich zum Ziel gesetzt, mit einer neuen Mengenlehre die technische und wissenschaftliche Welt zu revolutionieren. Doch halt! Bevor wir etwas über diese neue Theorie sagen, sollten wir noch einmal an die Grundlagen der *klassischen Mengenlehre* erinnern: Nach G. Cantor (1845-1918) versteht man unter einer Menge eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen.

Das Beispiel von den Beatles zeigt, was das Wesentliche einer Menge ist: Von jedem Objekt x lässt sich sagen, ob es zur Menge M gehört oder nicht. Im ersten Fall sagt man *x ist ein Element von M*, kurz: $x \in M$, sonst sagt man *x ist kein Element von M*, kurz: $x \notin M$. John Lennon ist also ein Element der Menge der Beatles, Michael Jackson hingegen ist kein Element dieser Menge.

Ein Objekt kann entweder Element von M sein oder nicht; beides gleichzeitig ist nicht möglich. Dieses Konzept ist eng mit der aristotelischen Logik verknüpft. Ähnlich wie Euklid und Pythagoras zuvor für die Mathematik so hat Aristoteles (384-322 v. Chr.) für die der Mathematik zugrundeliegende Logik selbst ein Regelsystem erstellt, welches er auf wenige Axiome zurückführte. Bei den Axiomen handelt es sich um einfache grundlegende Sätze. Eines dieser Axiome ist der *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch*. Dieser besagt: Ein Ding kann nicht eine Eigenschaft A und gleichzeitig deren Gegenteil $\overline{A}$ haben. Es ist unmöglich, dass John Lennon zu den Beatles gehört und gleichzeitig nicht dazu gehört. *You can't eat the cake and have it in your hand*, sagen die Engländer, wenn sie klar machen wollen, dass eine Entweder-Oder-Entscheidung zu fällen ist. Den Kuchen kann man nicht herunterschlucken und gleichzeitig dazu noch in der Hand halten.

Aristoteles und mit ihm Cantor zwingen uns zu einer harten Entscheidung: *Entweder* Schwarz *oder* Weiß — Grautöne sind nicht zugelassen. Dieses Prinzip hat sich für die Mathematik als sehr fruchtbar herausgestellt. So konnten z.B. viele Sachverhalte durch den Mengenbegriff systematischer (damit auch übersichtlicher) und präziser erfasst werden.

Im alltäglichen Leben, aber auch bei vielen wissenschaftlichen oder technischen Problemen ist dieses Schwarz-Weiß-Denken allerdings problematisch:

– Gehört ein 47-jähriger zur *Menge der alten Menschen* ?
– Gehört eine 1,85 m große Person zur *Menge der großen Leute* ?
– Gehört ein Kind mit einer kleinen Wunde am Knie zur *Menge der gesunden Menschen* ?
– Gehört Holz zur *Menge der schlechten elektrischen Leiter* ?

Im Gegensatz zu den klassischen Mengen ist hier eine Entscheidung über die Zugehörigkeit oft unmöglich, manchmal sogar auch unsinnig. Der Grund dafür liegt darin, dass die benutzten Begriffe "alt", "groß", "krank", "schlechter Leiter" unscharf sind. Trotz oder gerade wegen dieser Unschärfe haben sich diese Begriffe bewährt; sie sind es, die eine rasche und einfache Verständigung erst möglich machen. Zwei Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Fragen Sie einmal in Ihrem Bekanntenkreis nach, ob Bohnen, Erbsen, rote Beete, Kartoffeln, Champignons, Salat, Kohl und Kürbis zur Menge *Gemüse* gehören. Bei einigen Sorten wie Bohnen oder Erbsen wird kein Zweifel auftauchen. Wie aber sieht es mit Kartoffeln oder gar Champignons aus? Trotz dieser Schwierigkeiten wird keiner auf die Idee kommen, den Begriff Gemüse über Bord zu werfen.

In einem medizinischen Ratgeber für Eltern findet man als Symptome für das Dreitagesfieber: "Plötzlich einsetzendes hohes Fieber, kaum verändertes Allgemeinbefinden, nach etwa 3 Tagen Temperaturabfall und Auftreten eines kleinfleckigen, blassroten Hautausschlags."
Stellen Sie sich vor, die Symptome wären schwarz-weiß formuliert, etwa: "Körpertemperatur zunächst höher als 38,5°C, Temperaturabfall nach frühestens 69 h, Hautausschlag mit Flecken, deren Durchmesser kleiner als 5 mm ist."
Stellen Sie sich nun weiter vor, Sie hätten bei einem Kind eine Diagnose zu erstellen. Sie befragen die Eltern und erfahren: Das Kind hatte eine Körpertemperatur von mehr als 38,5°C, es hatte einen Temperaturabfall nach 73 h. Aber als Sie die Durchmesser der Flecken untersuchen, stellen Sie fest, dass ihr Durchmesser 5,5 bis 7 Millimeter beträgt.
Also kein Dreitagesfieber?!

2.2 Zugehörigkeitsfunktionen

Schwarz-Weiß-Denken kann nicht nur unpraktisch, sondern manchmal sogar auch unsinnig sein. Nicht nur Ärzte greifen mit Erfolg auf unscharfes Expertenwissen zurück. Im letzten Kapitel hatten wir gesehen, dass der Mensch damit auch leicht einen Besenstiel balancieren kann. Will man einen Computer ein solches unscharfes Expertenwissen benutzen lassen, braucht man eine präzise Theorie über unscharfe Mengen.

Eine solche Theorie wurde 1965 von Lotfi Zadeh entwickelt. Seine neuen Mengen nannte er *Fuzzymengen*. "Fuzzy" bedeutet auf deutsch "unscharf, kraus, unklar". Was versteht man nun unter einer Fuzzymenge? Am Beispiel der *Fuzzymenge GR der großen Leute* soll dies nun erklärt werden.

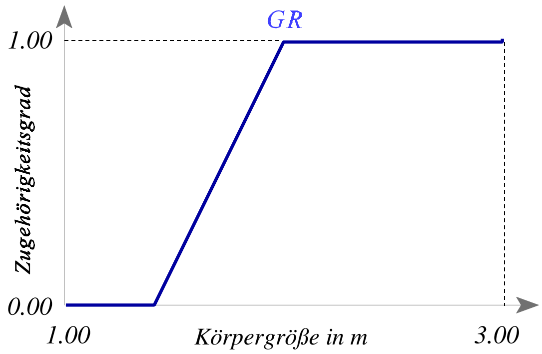
Personen mit einer Körpergröße über 2 m gehören - da sind wir uns sicherlich einig - auf jeden Fall zu dieser Menge *GR*, Personen unter 1,40 m auf keinen Fall. Was machen wir nun mit den "Zwischenfällen"? Wir geben ihnen Punkte zwischen 0 und 100. Unsere 1,20 m große Person bekommt natürlich 0, unser 2,20 m - Riese erhält 100 Punkte. Für die Zwischenfälle werden Experten befragt. Eine solche Umfrage kann ein Ergebnis wie in der Tabelle 2.1 haben.

Verteilen Sie jeweils 0 bis 100 Punkte für die Zugehörigkeit zur Menge der großen Leute:

Größe in m	Punkte
1,2	0
1,4	0
1,6	33
1,8	66
2,0	100
2,2	100
2,4	100

Tab. 2.1

Die Fuzzy-Logiker geben allerdings die Zugehörigkeit nicht in Punkten, sondern mit Zahlen zwischen 0 und 1 an. Aus der Tabelle und weiteren Umfragen können wir zu dem Graphen aus Abb. 2.2 gelangen.

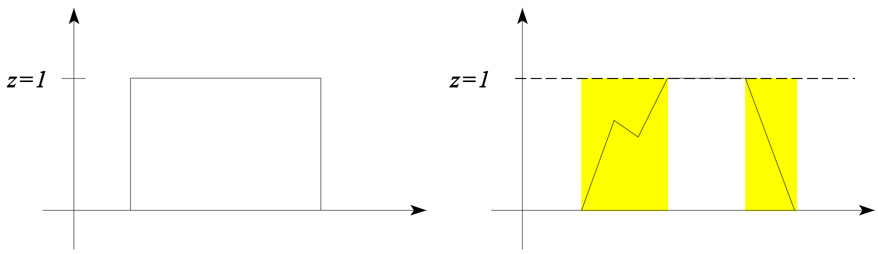


2.2 Die Fuzzymenge der großen Personen

Durch dieses Diagramm wird jeder Personengröße ein Zugehörigkeitsgrad *z* zugeordnet. Diese Zuordnung bezeichnet man als *Zugehörigkeitsfunktion*. Ihre Definitionsmenge wird *Grundmenge* genannt.

Eine Fuzzymenge wird also durch eine Funktion beschrieben. Messwerte, wie z.B. die Körpergröße bilden ihre Grundmenge. Ihre Funktionswerte sind aus dem Intervall [0;1]. Weil diese Funktion die wesentlichen Aspekte der Fuzzymenge erfassen, bezeichnen Fuzzy-Theoretiker sie oftmals selbst als Fuzzymenge.

Klassische Mengen lassen sich als spezielle Fuzzymengen ansehen, bei denen nur die Zugehörigkeitsgrade 0 und 1 auftauchen. Dort wo die Zugehörigkeitsgrade größer als 0 und kleiner als 1 sind, liegen die Grauzonen der Fuzzymenge.

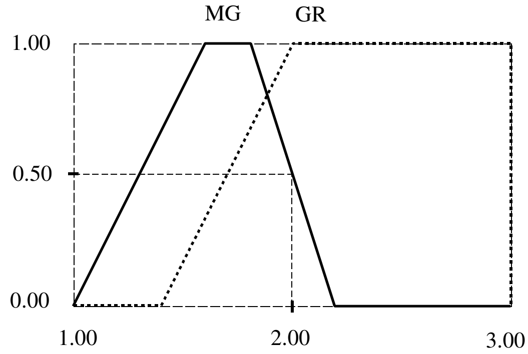


2.3 Zugehörigkeitsfunktion einer klassischen Menge (links) und einer Fuzzymenge (rechts)

2.3 Schnitt und Vereinigung bei Fuzzymengen

Mengen lassen sich auf verschiedene Weisen verknüpfen. Von den klassischen Mengen kennt man Schnitt- und Vereinigungsmenge. Unter der Schnittmenge der klassischen Mengen *A* und *B* versteht man die Menge aller Elemente, die sowohl zu *A* als auch zu *B* gehören:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



2.4 Die Fuzzymengen *MG* und *GR*

Die Vereinigung von *A* und *B* ist definiert als die Menge aller Elemente, die zu *A* oder (auch) zu *B* gehören:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

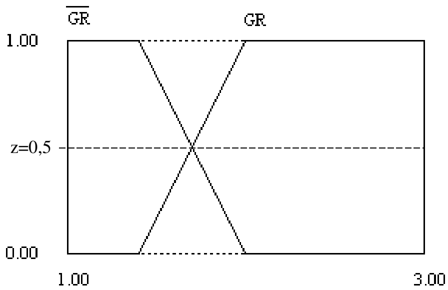
Bildet man nun den Schnitt von einer Menge *A* mit seinem Komplement $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$, erhält man

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

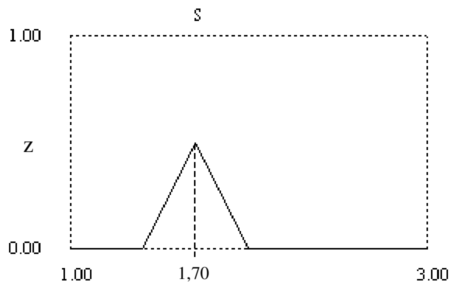
Dies ist der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch in der Sprache der Mengen: Es gibt kein Element, welches zu *A* und gleichzeitig zu $\overline{A}$ gehört.

Wie verhält es sich nun, wenn man derartige Verknüpfungen von Fuzzymengen bildet? Schauen wir uns dazu das Beispiel aus Abb. 2.4 an: Der mit *MG* gekennzeichnete Graph repräsentiere die Fuzzymenge der "*m*ittel*g*roßen" Leute, der mit *GR* bezeichnete Graph stellt die uns bereits bekannte Fuzzymenge der "*gr*oßen" Personen dar. Zur Schnittmenge gehören auf keinen Fall Personen mit einer Größe von 2,50 m. Sie sind zwar "groß", aber keinesfalls "mittelgroß". Der Zugehörigkeitsgrad zur Fuzzy-Schnittmenge ist für diese Leute 0. Eine 2,00 m große Person gehört mit $z = 1$ zur Fuzzy-Menge *GR*, aber nur mit $z = 0{,}5$ zur Fuzzymenge *MG*. Zu beiden Fuzzymengen kann diese Person deswegen nur mit $z = 0{,}5$ gehören. Die Zugehörigkeitsfunktion der Schnittmenge übernimmt hier also das Minimum der Zugehörigkeitsgrade von *MG* und *GR*. Allgemein gilt für die Zugehörigkeitsfunktion *S* der Schnittmenge von *MG* und *GR*:

$$S(x) = \min_{x \in [1;3]} (MG(x); GR(x))$$



2.5 Das Komplement von *GR*



2.6 Schnittmenge von *GR* und seinem Komplement

An die Zugehörigkeitsfunktion der Vereinigungsmenge gelangt man auf ähnliche Weise. Unsere 2,00 m große Person gehört mit $z = 1$ zur Fuzzymenge *GR* und damit auch mit $z = 1$ zur Vereinigungsmenge, unabhängig davon wie klein der Zugehörigkeitsgrad zu *MG* ist. Bei einer 1,50 m großen Person ist $MG\,(1{,}5) = 0{,}83$ und $GR\,(1{,}5) = 0{,}17$. Zur einen *oder* zur anderen Menge gehört sie dann mit $z = 0{,}83$. (Das Oder wird hier nicht im Sinne von Entweder-Oder benutzt.) Bei der Vereinigungsmenge übernimmt die Zugehörigkeitsfunktion *V* also das Maximum der Zugehörigkeitsgrade von *MG* und *GR*. Für die Zugehörigkeitsfunktion *V* gilt demnach:

$$V(x) \;=\; \max_{x \in [1;3]} (MG(x);\, GR(x))$$

Wie sieht nun das Komplement $\overline{GR}$ von *GR* aus? $\overline{GR}$ bezeichnet die Fuzzymenge der nicht großen Personen. Aus dem Zugehörigkeitsgrad $z = 0$ wird somit bei der Komplementbildung $z = 1$ und umgekehrt; geringe Zugehörigkeitsgrade werden groß, hohe Werte für z werden niedrig. Insbesondere wird man einer Person, die mit $z = 0{,}7$ zu *GR* gehört den Zugehörigkeitsgrad $z = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ für ihr Komplement zusprechen. Für den Graphen bedeutet dies eine Spiegelung an der z=0,5-Achse. In Abb. 2.5 sind die Graphen zu *GR* und $\overline{GR}$ dargestellt.

Bilden wir nun einmal die Schnittmenge von *GR* und $\overline{GR}$. Wir erhalten das Diagramm aus Abb. 2.6. Im Gegensatz zu den klassischen Mengen gibt es hier zahlreiche Fälle, die sowohl zu *GR* als auch zum Komplement $\overline{GR}$ gehören, sogar mit einem Zugehörigkeit bis zu $z = 0{,}5$. Eine solche Person von 1,70 m Größe ist zum Grad 0,5 groß und zum Grad 0,5 nicht groß. Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch gilt bei Fuzzymengen demnach nicht. Kaum anders verhält es sich im alltäglichen Sprachgebrauch: Eine 1,70 m große Person gehört ein wenig zu den großen Leuten und auch ein wenig zu dem Kreis der Personen, die nicht groß sind.

Man kann eben doch einen Teil seines Kuchens schon heruntergeschluckt haben und den Rest noch in der Hand halten!

2.4 Aufgaben

1. Von einem Sandhaufen wird ein Sandkorn weggenommen. Natürlich zweifelt keiner daran, dass es sich bei dem Rest noch um einen Sandhaufen handelt. Nun werden nacheinander weitere Sandkörner dem Haufen entzogen. Da die Anzahl der Sandkörner endlich ist, wird irgendwann einmal der Sandhaufen vollständig entfernt sein. Welche Schwierigkeiten treten bei einer cantorschen Betrachtungsweise auf? Erläutern Sie an diesem Beispiel den Vorteil einer fuzzymäßigen Beschreibung.

2. Suchen Sie nach weiteren Beispielen, bei denen eine klassische Menge unangebracht ist.

3. Unsere westliche Kultur ist von der griechischen Philosophie geprägt. Versuchen Sie herauszufinden, wie die fernöstlichen Kulturen zu dem Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch stehen.

4. Zeichnen Sie zu $\overline{MG}$, dem Komplement der Fuzzymenge *MG*, den Graphen der Zugehörigkeitsfunktion.