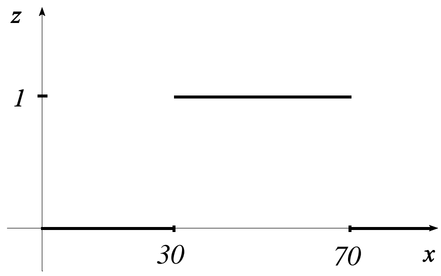
6 Fuzzy – die Theorie

In den vorangehenden Kapiteln wurde die Fuzzyregelung eher heuristisch betrachtet. Auf eine tiefere theoretische Fundierung war verzichtet worden. Wir wollen dies nun nachholen. Zum einen soll dadurch gezeigt werden, dass hinter der Fuzzyregelung, so wie sie bislang dargestellt wurde, weitaus allgemeinere Konzepte stehen. Zum anderen soll dadurch aber auch auf die Lektüre fachwissenschaftlicher Abhandlungen zum Thema Fuzzyregelung vorbereitet werden. Diese Kapitel richtet sich an den mathematisch interessierten und versierten Leser. Für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel ist es nicht erforderlich.

6.1 Fuzzymengen

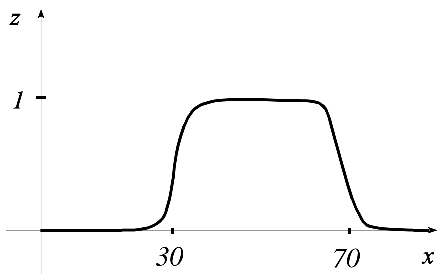
Die Zugehörigkeit zu einer (klassischen) Menge $M \subseteq X$ kann man durch eine sogenannte charakteristische Funktion $\mathbb{I}_M$ beschreiben. Diese Funktion besitzt nur die Funktionswerte 0 und 1. Dabei gilt:

$$\mathbb{I}_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M \\ 0, & \text{falls } x \notin M \end{cases} \qquad (1)$$



6.1 Zugehörigkeitsfunktion einer klassischen Menge

Die Gleichung $\mathbb{I}_M(x) = 1$ bedeutet also, dass x zur Menge *M* gehört; $\mathbb{I}_M(x) = 0$ zeigt dagegen an, dass *x* nicht zur Menge *M* gehört. Der in Abb. 6.1 dargestellte Graph ist z.B. die charakteristische Funktion des Intervalls]30; 70[. Auf diese Weise lassen sich Begriffe aus formalen Systemen, wie z.B. der Mathematik, sehr gut erfassen.



6.2 Graph einer Fuzzymenge

Zur Repräsentation unscharfer Begriffe der natürlichen Sprache ist eine solche Vorgehensweise nicht sinnvoll: Sehen wir die in Abb. 6.1 vorgestellte Menge M an als die Menge der günstigen Preise (in DM) für ein Paar Schuhe; dann stellt 69,98 DM noch einen günstigen Preis dar, dagegen würde ein um 3 Pfennig höherer Preis von 70,01 DM nicht mehr als günstig angesehen werden. Hier ist ein allmählicher, gleitender Übergang zwischen den extremen Werten 0 und 1 viel sinnvoller. Abb. 6.2 gibt einen möglichen Graphen einer solchen verallgemeinerten charakteristischen Funktion wieder. Die Gleichung $z(34) = 0{,}87$ besagt, dass der Wert $x = 34$ mit dem Zugehörigkeitsgrad $z = 0{,}87$ als günstiger Preis angesehen wird.

Unscharfe Begriffe lassen sich also durch verallgemeinerte charakteristische Funktionen beschreiben. Diese repräsentieren unscharfe Mengen. Man definiert:

Definition 1: Unter einer **Fuzzymenge *z* von *X*** versteht man eine Funktion von der Grundmenge *X* in das Intervall [0; 1], d.h.

$$z: X \to [0;1] \qquad (2)$$

Die Funktionswerte von z bezeichnet man als Zugehörigkeitsgrade.

Die Festlegung der Zugehörigkeitsgrade bei einer konkreten Fuzzymenge erfolgt meist intuitiv. Sie ist die Schnittstelle zwischen der unscharfen Begrifflichkeit der natürlichen Sprache und der präzisen formalen Sprache der Mathematik.

Zur Repräsentation von scharfen einelementigen Mengen werden sogenannte Singletons verwendet. Das sind Funktionen, deren Funktionswerte nur an einer Stelle 1 und sonst 0 sind. In diesem Buch haben wir uns auf solche Fuzzymengen beschränkt, deren Graphen Dreiecks- oder Trapezgestalt haben. Natürlich sind auch andere Funktionen denkbar. In der Praxis greift man allerdings fast ausschließlich auf derartige Dreiecks- oder Trapezfunktionen zurück. Deren Funktionswerte lassen sich nämlich einfach und schnell berechnen.

6.2 Operationen auf Fuzzymengen

In Kapitel 2 hatten wir schon das Komplement, den Durchschnitt und die Vereinigung von Fuzzymengen kennengelernt. Die Zugehörigkeitsgrade des Durchschnitts der Fuzzymengen a und b hatten wir mit Hilfe des Minimums berechnet:

$$D(a(x), b(x)) = \min(a(x), b(x)) \tag{3}$$

Der so definierte Schnittmengenoperator D hat folgende Eigenschaften:

(i)	$D(a, 1) = a$	(1 ist Einselement)
(ii)	$a \leq b \Rightarrow D(a, c) \leq D(b, c)$	(Monotonie)
(iii)	$D(a, b) = D(b, a)$	(Kommutativität)
(iv)	$D(a, D(b, c)) = D(D(a, b), c)$	(Transitivität)

Aus diesen grundlegenden Eigenschaften lassen sich weitere Eigenschaften des Durchschnittsoperators ableiten. Aus $a \leq 1$ folgt z.B. mit (2) und (1):

$$D(a, b) \leq D(b, 1) = b \tag{4}$$

Wegen der Kommutativität (iii) gilt dann auch $D(a, b) \leq a$. Für $b = 0$ ergibt sich daraus $D(a, 0) \leq 0$. Weil die Zugehörigkeitsgrade nicht negativ sind, ergibt sich somit:

$$D(a, 0) = 0 \tag{5}$$

Aus (4) und (5) können wir schließen: Die Zugehörigkeitsgrade einer Schnittmenge sind höchstens so groß wie die einzelnen Zugehörigkeitsgrade, und die Schnittmenge einer Fuzzymenge mit einer leeren Fuzzymenge ist ebenfalls leer. Bemerkenswert ist, dass diese Schlussfolgerungen gar nicht abhängig sind von der konkreten Definition des Durchschnittoperators (3), sondern lediglich auf den Eigenschaften (i) bis (iv) fußen. Diese beschreiben gewissermaßen die Minimalanforderungen an einen Durchschnittsoperator. Tatsächlich gibt es neben unserer Minimumfunktion (3) weitere Operatoren, welche diese Mindestanforderungen erfüllen. Derartige Operatoren werden t-Normen genannt.

Definition: Eine Funktion $\top : [0, 1]^2 \to [0,1]$ heißt **t-Norm**, wenn Sie die Bedingungen

(i)	$\top(a, 1) = a$	(1 ist Einselement)
(ii)	$a \leq b \Rightarrow \top(a, c) \leq \top(b, c)$	(Monotonie)
(iii)	$\top(a, b) = \top(b, a)$	(Kommutativität)
(iv)	$\top(a, \top(b, c)) = \top(\top(a, b), c)$	(Transitivität)

erfüllt.

Geläufige t-Normen sind:

Minimum-Operator: $\top(a, b) = \min(a, b)$
Lukasiewicz-Operator: $\top(a, b) = \max(0, a+b-1)$
Produkt-Operator: $\top(a, b) = a \cdot b$

Für die Vereinigung von Fuzzymengen können ähnliche Betrachtungen angestellt werden. Auf diese Weise gelangt man zum Begriff der t-Conorm.

Definition: Eine Funktion $\perp : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ heißt **t-Conorm**, wenn Sie die Eigenschaften (ii) bis (iv) für t-Normen besitzt und zusätzlich die Bedingung

(i') $\perp(a, 0) = a$ (0 ist Einselement)

erfüllt.

Man prüft leicht nach, dass der durch $V(a(x), b(x)) = \max(a(x), b(x))$ definierte Vereinigungsoperator V die Bedingungen (i') und (ii) bis (iv) erfüllt. Zwischen den beiden Operatoren D und V besteht der Zusammenhang $V(a,b) = 1 - D(1-a, 1-b)$. Allgemein lässt sich aus jeder t-Norm $\top$ mit der Beziehung

$$\perp(a,b) = 1 - \top(1-a, 1-b) \tag{6}$$

eine t-Conorm definieren.

Definition: Eine Fuzzymenge $\overline{a}$ heißt **Komplement** zur Fuzzymenge a, wenn gilt: $\overline{a}(x) = 1 - a(x)$.

Zur formalen Klärung der Fuzzyregelung wird der Begriff der Fuzzyrelation benötigt. Darunter versteht man Fuzzymengen, deren Grundmenge das kartesische Produkt zweier Fuzzymengen ist. Genauer legt man fest:

Definition: Seien a und b Fuzzymengen von X bzw. Y. Dann wird durch

$$(a \otimes b)(x,y) = \min(a(x), b(y)) \tag{7}$$

eine Fuzzymenge $a \otimes b$ von $X \times Y$ definiert. Sie heißt **kartesisches Produkt von *a* und *b***.

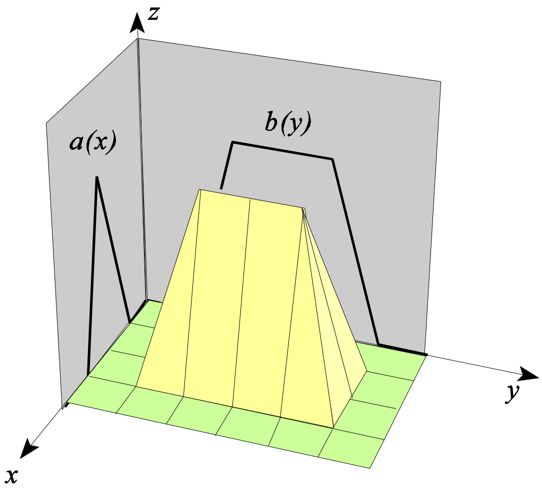
Der Minimumoperator bedeutet hier, dass der Zugehörigkeitsgrad des Wertepaares sich nach dem kleineren der beiden beteiligten Zugehörigkeitsgrade richtet.

Definition: Seien a und b Fuzzymengen von X und Y. Eine Abbildung

$$\rho: X \times Y \rightarrow [0, 1] \text{ mit } \rho(x,y) \leq \min(a(x), b(y)) \tag{8}$$

heißt eine **Fuzzyrelation von *a* und *b***.

Die Zugehörigkeitsgrade einer Fuzzyrelation ρ drücken aus, wie stark eine Beziehung zwischen den Werten x und y sein soll. Nach (8) sind sind sie höchstens so groß wie die Zugehörigkeitsgrade der entsprechenden kartesischen Produkte. Abb. 6.3 zeigt die Graphen zweier Fuzzymengen a und b sowie ihres kartesischen Produktes. Die Graphen von Fuzzyrelationen werden durch diese Fläche nach oben begrenzt.



6.3 Graph des kartesischen Produkts der Fuzzymengen *a* und *b*

Die Komposition einer Relation ρ mit einer Fuzzymenge *a* ist folgendermaßen definiert:

Definition: Seien *a* eine Fuzzymenge von *X* und ρ eine Relation von $X \otimes Y$. Dann versteht man unter der **Komposition *a* ∘ ρ** eine Abbildung von *Y* nach [0, 1] mit:

$$(a \circ \rho)\,(y) \;=\; \sup_{x \in X}\,(\top\,(a(x),\,\rho(x,y))) \tag{9}$$

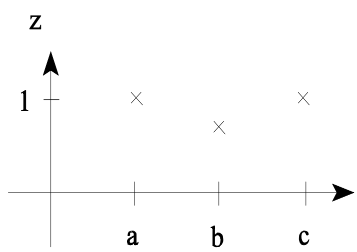
Diese Definition stellt eine Verallgemeinerung der Komposition bei gewöhnlichen Mengen dar:

$$A \circ R \;=\; \{y \in Y \,|\, \exists\, x \in X\colon\; x \in A \,\wedge\, (x,y) \in R\} \tag{10}$$

Diese Menge umfasst alle diejenigen Elemente der Menge *Y*, die über die Relation *R* mit der Menge *A* verbunden sind.

An einem Beispiel sollen diese Definitionen etwas erläutert werden. Der Einfachheit halber greifen wir auf endliche, diskrete Fuzzymengen zurück. Diese lassen sich durch eine endliche Summe von Singletons beschreiben; ihre Graphen bestehen aus einzelnen Punkten. Insbesondere kann bei solchen Fuzzymengen das Supremum durch ein Maximum ersetzt werden.

X bezeichne die Menge aller Schüler, und *s* sei die Fuzzymenge der drei Schüler Albert (*a*), Bernd (*b*) und Caroline (*c*). *s* ist keine klassische Menge, denn Bernd kommt nur selten zur Schule. Seine Zugehörigkeit zur Menge *s* betrage nur 0,7. Die beiden anderen Schüler mögen den Zugehörigkeitsgrad 1 besitzen. Der zugehörige Graph ist in Abb. 6.4 dargestellt. Mit *Y* werde die Menge aller Unterrichtsfächer bezeichnet, und *u* bezeichne die Fuzzymenge der Unterrichtsfächer Deutsch (*d*), Englisch (*e*), Französisch (*f*) und Geographie (*g*). Auch diese Menge ist keine klassische Menge, da



6.4 Das Diagramm der Fuzzymenge *s*

der Unterricht in Französisch oft ausfällt. So kann man für seine Zugehörigkeit zu *u* nur einen Wert von 0,6 feststellen. Alle restlichen Zugehörigkeitsgrade mögen wieder 1 betragen.

Die Fuzzyrelation ρ: $X \times Y \to [0; 1]$ soll nun die Beziehung "ist gut im Fach" beschreiben (Tabelle 6.1). ρ(*a*, *g*) = 0,3 bedeutet hier, dass Albert zum Grad 0,3 gut im Fach Geographie ist, mit anderen Worten: Er ist keine allzu große Leuchte in diesem Fach. Man beachte, dass Bernd in keinem Fach einen größeren Wert als 0,7 und im Fach Französisch kein Schüler einen Wert größer als 0,6 erreichen kann!

Jetzt nehmen diese Schüler an einem Projekt "Tropischer Regenwald" teil, das sie im Internet in deutscher, englischer und französischer Sprache präsentieren sollen. Welche Leistungen sind in in den Bereichen Geographie (g) sowie in den Sprachen Deutsch, Englisch und Französisch (d, e und f) zu erwarten? Nun, wenn alle Schüler sich hundertprozentig am Projekt beteiligen (und jeweils die besten Leistungen in die Arbeit einfließen), ist die Antwort leicht: Man erhält sie aus dem Maximum jeder Spalte der Relationstabelle 6.1: Für Deutsch erhält man den Wert 0,6, für Englisch den Wert 0,8, für Französisch den Wert 0,6 und für Geographie den Wert 1,0.

ρ	***d***	***e***	***f***	***g***
a	0,1	0,8	0,2	0,3
b	0,4	0,7	0,5	0,1
c	0,6	0,3	0,6	1,0

Tab. 6.1 Wertetabelle für die Fuzzyrelation ρ.

Wenn sich die Schüler nun aber in unterschiedlicher Weise am Projekt engagieren, wird es schwieriger, eine solche Bewertung vorzunehmen. Zunächst einmal liegt es nahe, das Engagement der einzelnen Schüler wieder durch eine Fuzzymenge zu erfassen. Wir bezeichnen sie mit *p*: *p*(*b*) = 0,9 bedeutet, dass Bernd sich recht ordentlich am Projekt beteiligt; dagegen hält sich Caroline mit *p*(*c*) = 0,2 stark zurück, und Albert schlägt sich mit *p*(*a*) = 0,5 so durch. Die Leistung auf den vier Gebieten *d*, *e*, *f* und *g* erhält man nun aus der Komposition der Fuzzymenge *p* mit der Fuzzyrelation ρ. Sie berücksichtigt nicht nur die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Schüler in den einzelnen Fächern, sondern auch, wie stark die Schüler sich bei diesem Projekt engagieren. Für den im Aspekt Deutsch erzielten Leistungswert berechnet man z.B.

$$\begin{aligned}(p \circ \rho)(d) &= \max\{\min(0{,}5; 0{,}1); \min(0{,}9; 0{,}4); \min(0{,}2; 0{,}6)\}\\ &= \max\{0{,}1; 0{,}4; 0{,}2\}\\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

Für die restlichen Fächer erhält man auf die gleiche Weise:

$$\begin{aligned}(p \circ \rho)(e) &= 0{,}7\\ (p \circ \rho)(f) &= 0{,}5\\ (p \circ \rho)(g) &= 0{,}5\end{aligned}$$

Mithilfe der Fuzzymengen haben wir ein einfaches Modell dafür formulieren können, wie sich verschiedene Merkmale der Schüler und des Unterrichts auf die Gesamtleistung einer Gruppe in den verschiedenen Fächern auswirken kann. Wie jedes Modell hat es seine Grenzen: So wird z.B. nicht erfasst, dass bei einer Gruppe eben durch die Zusammenarbeit die Gesamtleistung durchaus auch höher ausfallen kann als die Leistung des besten Schülers dieser Gruppe.

6.3 Unscharfes Schließen

Die Aufgabe der Inferenz ist es, Eingabewerte mit dem sprachlich formulierten, unscharfen Regelwerk zu verknüpfen und daraus Folgerungen zu ziehen. Im allgemeinen Fall können die Eingabewerte unscharfe Fuzzymengen sein; hier soll aber weiterhin davon ausgegangen werden, dass es sich bei den Eingabewerten um scharfe Messwerte handelt.

Seit Aristoteles benutzt man in der binären Logik den Modus-Ponens: Aus der allgemeinen Regel "Alle Menschen sind sterblich" und der konkreten Vorgabe "Sokrates ist ein Mensch" schließt man "Sokrates ist sterblich" Die allgemeine Regel lässt sich als Implikation formulieren: "Wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich." Damit erhält der Modus-Ponens die Gestalt:

Implikation:	x ist ein Mensch	$\Rightarrow$	x ist sterblich
Prämisse:	Sokrates ist ein Mensch		
Folgerung:			Sokrates ist sterblich

Bei der Fuzzyregelung wird dieser binäre Modus-Ponens zunächst aufgeweicht: Weil hier unscharfe Begriffe benutzt werden, können wir bei der Folgerung nicht davon ausgehen, dass der DANN-Teil der Implikation die Folgerung exakt angibt. Darüber hinaus soll die Folgerung aber auch berücksichtigen, inwieweit die Prämisse den WENN-Teil der Implikation erfüllt. Insbesondere soll dem alltäglichen Verständnis folgend der DANN-Teil nur in geringem Maße zutreffen, wenn die Prämisse den WENN-Teil nur wenig erfüllt. Man beachte, dass im Gegensatz dazu beim aristotelischen Modus-Ponens die Prämisse "Sokrates ist kein Mensch" *nicht* zur Folgerung "Sokrates ist nicht sterblich" führt.

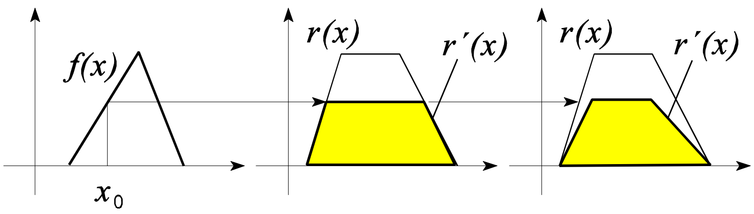
Wie fuzzymäßig Schlussfolgerungen durchgeführt werden, soll nun am Beispiel der aus Kapitel 4 bekannten Laufkatze genauer betrachtet werden. Ein System von Implikationen sowie ein scharfer Positionswert x_0 als Prämisse liegen vor. Schauen wir uns zunächst an, wie eine dieser Implikationen mit diesem Messwert verarbeitet wird:

Implikation:	Position = fern	$\Rightarrow$	Kraft = rechts
Prämisse:	$x = x_0$		
Folgerung:			Kraft = rechts´

Dabei steht *rechts´* für eine neue (modifizierte) Fuzzymenge *r´*, welche die Prämisse berücksichtigt. Wie erhält man nun diese neue Fuzzymenge? Die Implikation stellt eine Beziehung dar zwischen den Fuzzymengen *f* (*fern*) und *r* (*rechts*) dar. Nach Mamdani (vgl. auch Kapitel 7) drückt man sie durch eine Fuzzyrelation *i* aus; er benutzt dazu das kartesische Produkt:

$$i(x,y) = (f \otimes g)(x,y) = \min(f(x), r(y)) \qquad (11)$$

Man beachte, dass die Zugehörigkeitsgrade von *i* klein sind, wenn schon die Zugehörigkeitsgrade von *f* klein sind! Sodann wird die Komposition dieser Relation *i* mit der Prämisse nach (9) gebildet. Dabei wird der scharfe Messwert x_0 durch ein Singleton f_0 dargestellt, das nur an der Stelle x_0 von Null verschieden ist und dort den Wert $f(x_0)$ hat:



6.5 Nach Mamdani wird der Graph der Ausgangsfunktion gekappt (Mitte). In diesem Buch wird stattdessen eine Stauchung vorgenommen (rechts).

$$\begin{aligned}(f_0 \circ i)(y) &= \sup_{x\in X}(\min(f_0(x), i(x,y))) \\ &= \min(f(x_0), i(x_0,y)) \\ &= \min(f(x_0), \min(f(x_0), r(y))) \\ &= \min(f(x_0), r(y))\end{aligned} \tag{12}$$

Dies ist die gesuchte Fuzzymenge $r´$. Anschaulich betrachtet erhält man sie aus der Fuzzymenge r, indem man deren Funktionswert durch den Erfüllungsgrad $f(x_0)$ beschränkt (Abb. 6.5 Mitte). Insbesondere ist $i = 0$, wenn x_0 gar nicht zur Fuzzymenge *fern* gehört, d. h. wenn $f(x_0) = 0$ ist.

Im allgemeinen Fall treten im WENN-Teil der Implikation UND-Verknüpfungen auf. Sie werden von Mamdani durch den min-Operator berücksichtigt. Auf diese Weise erhält man durch die verschiedenen Implikationen jeweils eine angepasste Ausgangsfunktion. Daraus bestimmt man nun die Gesamtausgabefunktion als Vereingungsmenge mit dem max-Operator.

Diese von Mamdani eingeführte Inferenz wird wegen der benutzten Operatoren auch Max-Min-Inferenz genannt. Statt der benutzten min- und max-Operatoren können natürlich auch andere t-Normen mit ihren t-Conormen benutzt werden.

In diesem Buch wurde durchgehend die Mamdani-Inferenz eingesetzt, allerdings in einer etwas modifizierten Version. Der Unterschied lässt sich an der Abb. 6.5 erkennen: Während bei Mamdani die Ausgangsfunktion gekappt werden, wird in diesem Buch eine Stauchung am Graphen vorgenommen. Außerdem werden die auf diese Weise angepassten Ausgangsfunktionen addiert und nicht mit dem max-Operator verknüpft. Dieser additive Regler hat theoretische und praktische Vorteile: Einerseits lässt sich für ihn das FAT-Theorem beweisen (vgl. nächstes Kapitel); andererseits sind auch einige Berechnungen einfacher, insbesondere die der Schwerpunktskoordinate.

6.4 Defuzzifizierung

Für die Defuzzifizierung hatten wir in Kapitel 4 den Schwerpunkt des Ausgangsdiagramms herangezogen. Diese Schwerpunktsmethode ist allerdings nicht die einzige. Als weitere Methoden hatten wir schon die Max-Methode und die Mittelwert-Max-Methode kennen gelernt. Im ersten Fall wird die Stelle des globalen Maximums, im zweiten Fall der Mittelwert der Stellen mit lokalem Maximum bestimmt. Im Gegensatz zur Schwerpunktsmethode können diese Regler ein sprunghaftes Verhalten aufweisen. Dies kann z.B. sinnvoll sein, wenn die Ausgangsgröße einen binären Schalter steuern soll.

Zahlreiche weitere Methoden zur Inferenz und zur Defuzzifizierung sind entwickelt worden und werden auch in der Praxis eingesetzt. Im Rahmen dieser Einführung in die Fuzzytheorie muss jedoch auf deren Darstellung verzichtet werden. Wir hoffen jedoch, mit diesem Kapitel die formalen Grundlagen der Fuzzytheorie in genügender Weise mit den anschaulichen Überlegungen der vorangehenden Kapitel verknüpft zu haben. Nun sollte es dem Leser nicht mehr allzu schwer fallen, sich mit weiterführenden Abhandlungen zur Fuzzyregelung zu beschäftigen.