Intermezzo: Wir stellen Zahlen mit Leuchtdioden dar

Die Bezeichnung *Computer* stammt vom englischen Verb *to compute*, zu deutsch *rechnen*. In der Tat wurden Computer in den ersten Jahren fast ausschließlich zur Durchführung komplexer Rechnungen eingesetzt. Damals gab es auch noch keine Monitore, welche die Ergebnisse der Berechnungen hätten anzeigen können. Vielmehr benutzte man dazu häufig eine Reihe von Lämpchen ähnlich wie in Abb. 1. Um Platz zu sparen, wurden bei diesem Aufbau allerdings Leuchtdioden statt Lämpchen eingebaut. Je nachdem wie die Schalter S0 (rechts) bis S7 (links) am oberen Bildschirmrand stehen, leuchten unterschiedliche Leuchtdioden auf. Welche Zahl soll hiermit nun dargestellt werden?

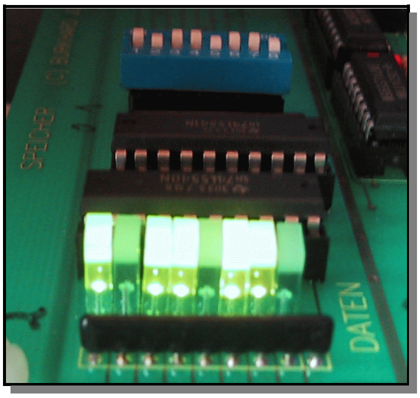

Abb. 1: Welche Zahl ist das?

Die einfachste Vorstellung besteht darin, dass die dargestellte Zahl gleich der Anzahl der leuchtenden Leuchtdioden ist: In unserem Beispiel würde die Leuchtdiodenreihe also die Zahl 5 darstellen. Diese Deutung hat aber erhebliche Nachteile. So können wir damit nur wenige Zahlen (nämlich die neun Zahlen von 0 bis 8) anzeigen. Umgekehrt brauchten wir natürlich sehr viele Leuchtdioden, um größere Zahlen darstellen zu können; der Materialaufwand wäre dementsprechend hoch. Genauso wichtig ist aber auch, dass bei größeren Zahlen diese Art der Darstellung sehr unübersichtlich wird.

Du kennst dieses Problem sicherlich schon von Strichlisten. Die Anzahl der Striche in Abb. 2 ist nicht auf den ersten Blick (und auch nicht auf den zweiten!) zu erkennen. Um eine solche Liste übersichtlicher zu gestalten, benutzt man deswegen häufig einen Trick; man fasst die Striche in Fünfer-Gruppen zusammen (Abb. 3).

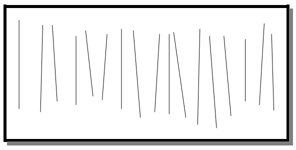
Abb. 2: Eine Strichliste

Jetzt kann man die Anzahl der Striche sofort erkennen: $3 \cdot 5 + 2 = 17$. Fasst man nun mehrere solcher Strichlisten zusammen, kann man dies in einer Fünfer-Tabelle tun (Abb. 4). Dabei steht ein | in der Fünfer-Spalte für die Zahl 5. Der Eintrag 𝍸 in dieser Spalte steht für 5 Fünfer-Gruppen, also für 25. Deswegen können wir den 𝍸-Eintrag in der Fünfer-Spalte durch einen Strich in der 25-Spalte ersetzen. Wenn wir so verfahren, stehen in jeder Spalte höchstens 4 Striche; dadurch bleibt die Tabelle übersichtlich. Gegebenenfalls wird man in der Tabelle links noch weitere Spalten für $5 \cdot 25 = 125$, $5 \cdot 125 = 625$, ... anfügen.

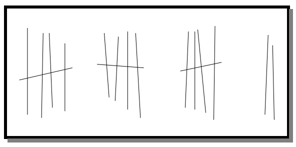
Abb. 3: Fünfergruppen

Letztendlich stellen wir dadurch Zahlen im **Fünfersystem** dar. Die Spalten der Tabelle geben die einzelnen Stellen an; die Werte der Stellen (Stellenwerte) sind $5^0 = 1$; $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, ... In die einzelnen Spalten werden höchstens 4 Striche eingetragen, d. h. in unserem Fünfersystem gibt es nur die fünf Ziffern 0 bis 4. In der Abb. 4 handelt es sich also um die Zahl $1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 42$.

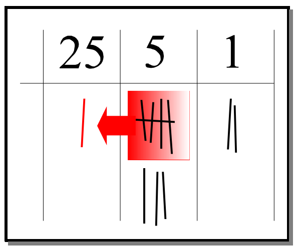

Abb. 4: Fünfersystem

Die Leuchtdiodenanzeige in Abb. 1 kann man ganz ähnlich deuten: Jede Leuchtdiode steht für eine Stelle. Allerdings kann unsere Leuchtdiode nur zwei verschiedene Ziffern darstellen: 0 = AUS und 1 = AN. Wir haben es hier dementsprechend mit dem **Zweiersystem** zu tun. Für unsere Leuchtdiodenkette schreibt der Mathematiker kurz 10110110_2. Dabei zeigt der Index 2 an, dass die einzelnen Stellen nicht die vom Zehnersystem gewohnten **Stufenzahlen** Eins, Zehn, Hundert... besitzen, sondern die Werte $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ ... . Zahlen im Zweiersystem nennt man häufig auch **Dualzahlen**.

Welche Zahl stellt die Leuchtdiodenreihe aus Abb. 1 jetzt dar? Zur Beantwortung dieser Frage ist es günstig, zuerst über die einzelnen Stellen der Dualzahl die zugehörigen Stufenzahlen zu schreiben – so, wie es in der folgenden Tabelle zu sehen ist.

Zweiersystem								**Zehnersystem**
128	*64*	*32*	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*	
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**·*128*+**0**·*64*+**1**·*32*+**1**·*16*+**0**·*8*+**1**·*4*+**1**·*2*+**0**·*1* =182

Um aus der Darstellung im Zweiersystem an die gewohnte Darstellung im Zehnersystem zu gelangen, müssen wir also nur die Ziffern mit den zugehörigen Stufenzahlen multiplizieren und die so erhaltenen Ergebnisse addieren.

Vom Zehnersystem zum Zweiersystem

Wie aber kommen wir nun umgekehrt von einer Zahl im Zehnersystem zu einer entsprechenden Darstellung im Zweiersystem. Das wollen wir uns an einem Beispiel klar machen: Gegeben ist die Zahl 157. Wie müssten die Schalter in Abb. 1 stehen, um diese Zahl darzustellen?

Zunächst überlegen wir, ob die erste Leuchtdiode L7 leuchten muss. Dazu überprüfen wir, ob 128 in 157 enthalten ist. Das ist natürlich der Fall, und so schließen wir den Schalter S7, d. h. S7 = 1. Nun betrachten wir den Rest 157 - 128 = 29. Wir überlegen, ob die nächst kleinere Stufenzahl 64 in diesem Rest 29 enthalten ist. Das ist nicht der Fall, also lassen wir den zugehörigen Schalter S6 geschlossen: S6 = 0. Auch die nächste Stufenzahl 32 ist nicht in 29 enthalten, also gilt S5 = 0. Die Stufenzahl 16 ist wieder in 29 enthalten, der zugehörige Schalter S5 wird geschlossen: S4=1. Wir betrachten abermals den Rest 29 - 16 = 13 und verfahren nach dem gleichen Schema weiter, bis wir bei der Stufenzahl 1 angekommen sind. Übersichtlich geschieht dies in Form der rechts stehenden Tabelle.

157 =	**1** · *128* + 29
29 =	**0** · *64* + 29
29 =	**0** · *32* + 29
29 =	**1** · *16* + 13
13 =	**1** · *8* + 5
5 =	**1** · *4* + 1
1 =	**0** · *2* + 1
1 =	**1** · *1*

Vom Zehnersystem zum Zweiersystem

Die Faktoren bei den Stufenzahlen in der rechten Spalte der Tabelle geben nun der Reihe nach die Ziffern im Zweiersystem an:

$$157 = \mathbf{1} \cdot 128 + \mathbf{0} \cdot 64 + \mathbf{0} \cdot 32 + \mathbf{1} \cdot 16 + \mathbf{1} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{0} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 1$$

Die Darstellung von 157 im Zweiersystem ist also 10011101_2.

Aufgaben

1. In Abb. 5 siehst du drei Leuchtdiodenreihen. Bestimme die Werte der Zahlen im Zehnersystem. Welche Aufgabe hat dieser Modellrechner gerade gelöst?

2. Wie lauten die Zahlen 233, 57, 63 und 100 im Zweiersystem?

3. Welches ist die größte Zahl, die man mit 8 Leuchtdioden darstellen kann?

4. Schreibe ein Programm, welches Dualzahlen ins Zehnersystem umrechnet.

5. Schreibe ein Programm, welches Zahlen aus dem Zehnersystem ins Zweiersystem umrechnet. Benutze die Modulo-Operation.

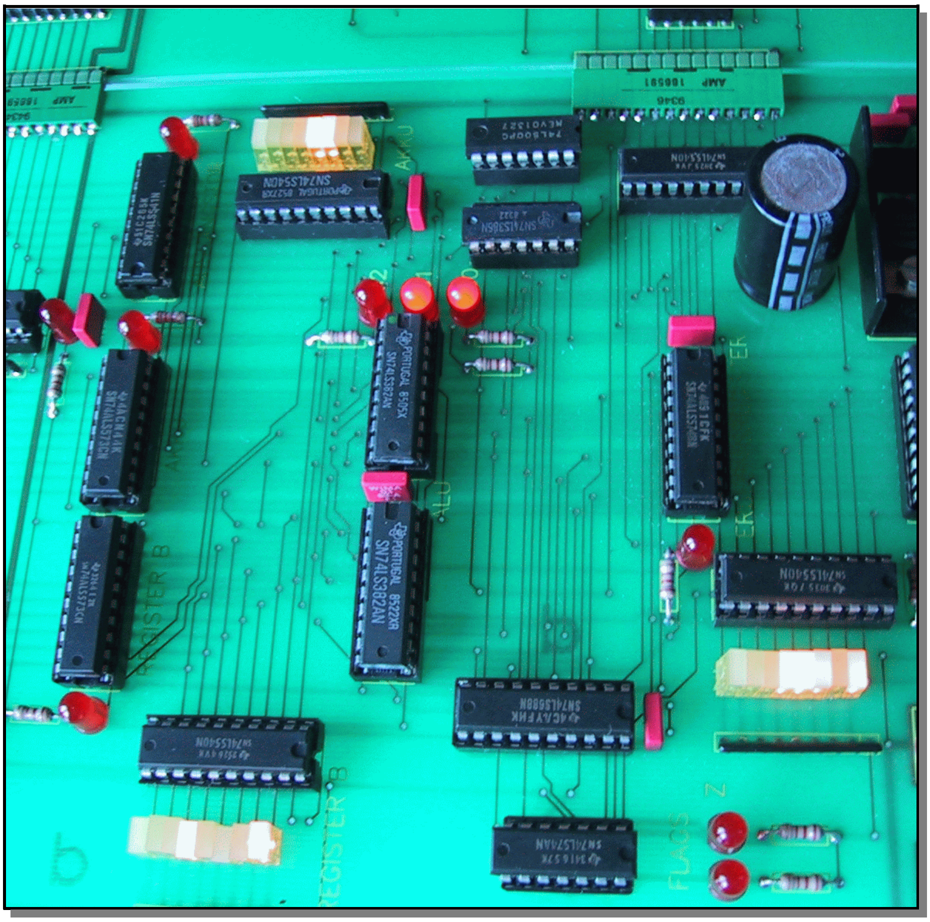

Abb. 5: Das Rechenwerk eines Modellcomputers

Wir rechnen mit Dualzahlen

Mit Dualzahlen kann man wie mit den Zahlen des Zehnersystems rechnen. Wir beginnen mit der schriftlichen Addition. Beim stellenweisen Rechnen muss lediglich beachtet werden, dass bereits ab der Zahl $2 = 10_2$ ein Übertrag erfolgt:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_2 \\
+ & & 1 & 0 & 0_1 & 1_1 & 1_1 & 1_2 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0_2
\end{array}
$$

Auch die schriftliche Multiplikation ist sehr einfach, schließlich handelt es sich bei den Zwischenrechnungen lediglich um Multiplikationen mit 1 oder 0. Die Zwischenergebnisse müssen dann nur noch addiert werden:

$$
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{1\,0\,1\,1_2 \;\cdot\; 1\,1\,0_2} \\
\hline
 & & 1\,0\,1\,1_2 \\
 & & 1\,0\,1\,1_2 \\
 & & 0_2 \\
\hline
 & & 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0_2
\end{array}
$$

Dabei wurde der Übertrag bei dieser Rechnung nicht mehr hingeschrieben.

Aufgaben

1. Kontrolliere die Ergebnisse der beiden Rechnungen aus diesem Abschnitt nach, indem du alle auftauchenden Dualzahlen ins Zehnersystem umwandelst.

2. Berechne im Zehner- und im Zweiersystem: $27 + 38$; $25 \cdot 13$.