Fallbewegung mit Reibung

Wir filmen den Fall einer Stahlkugel in einem mit Salatöl gefüllten Glaszylinder und werten den Film mithilfe eines Videoanalyse-Programms sowie eines einfachen Modellbildungssystems aus.

1. Messdaten

Daten der Eisenkugel: $m = 4{,}07\text{ g}$ $r = 0{,}50\text{ cm}$

Höhe des Standzylinders : 34 cm (wichtig für die Kalibrierung des Video-Koordinatensystems)

Dichte des Öls: $\rho = 1{,}0\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

2. Wirkende Kräfte

Auf die fallende Stahlkugel wirken die Gewichtskraft F_G, die Auftriebskraft F_A und die Reibungskraft F_R. Die resultierende Kraft ist

$$F = -F_G + F_A + F_R$$

$$\text{mit } F_G = m\,g,\ F_A = \rho\,\frac{4\,\pi}{3}\,r^3\,g \text{ und } F_R = k \cdot v^2$$

Dabei hängt k von der Ölsorte und der Größe der Kugel ab; in unserem Fall ist k konstant. (Unklar dabei ist, ob der Ansatz für die Reibungskraft korrekt ist, vgl. 8.)

3. Startbeschleunigung

Zu Beginn der Fallbewegung ist die Geschwindigkeit noch klein; wegen der quadratischen Abhängigkeit ist dann die Reibungskraft bei den wirkenden Kräften zu vernachlässigen. Die Beschleunigung beträgt zu Beginn

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-F_G + F_A}{m} = \frac{-39{,}9\text{ mN} + 5{,}1\text{ mN}}{4{,}07\text{ g}} = 8{,}54\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4. Endgeschwindigkeit

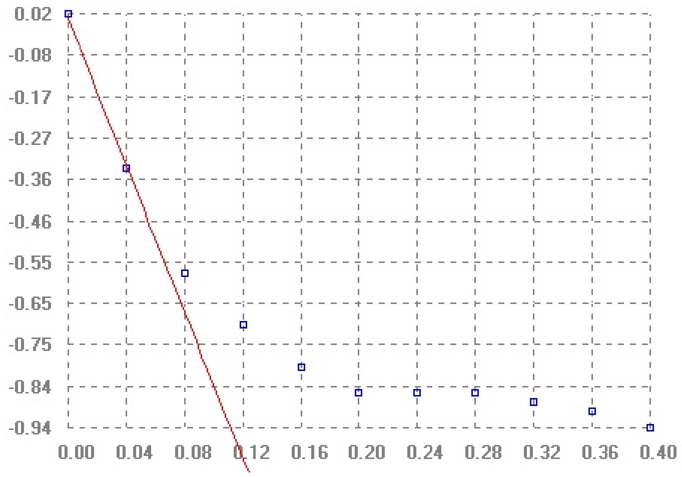
Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die Reibungskraft, bis die resultierende Kraft schließlich 0 ist. In diesem Fall ist die Beschleunigung 0, d.h. die Geschwindigkeit ist konstant. Aus $F = 0$ ergibt sich

$$k = \frac{F_G - F_A}{v^2}$$

Aus der Endgeschwindigkeit lässt sich also die Konstante k ermitteln.

5. Videoanalyse

Starten wir nun das Videoanalyse-Programm ***Easyvid*** und laden die Datei oel1.avi. Die Analyse dieses Videofilms liefert folgendes v-t-Diagramm (Die Messdaten sind in oel1.dat gespeichert.):



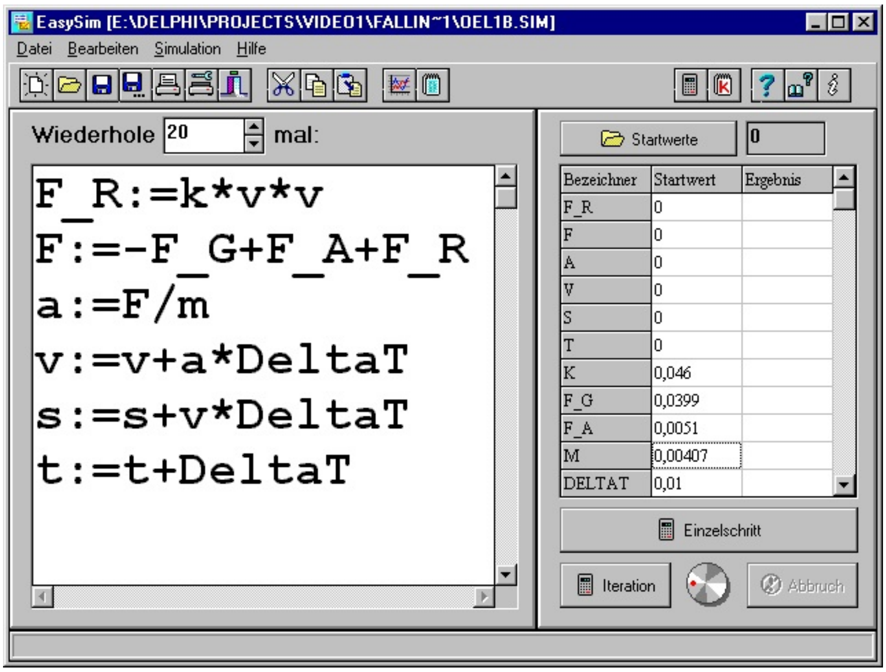
Zusätzlich ist eine Gerade mit der Steigung $-8{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ eingetragen. Das Experiment bestätigt also die in Punkt 5 berechnete Startbeschleunigung.

6. Bestimmung von *k*

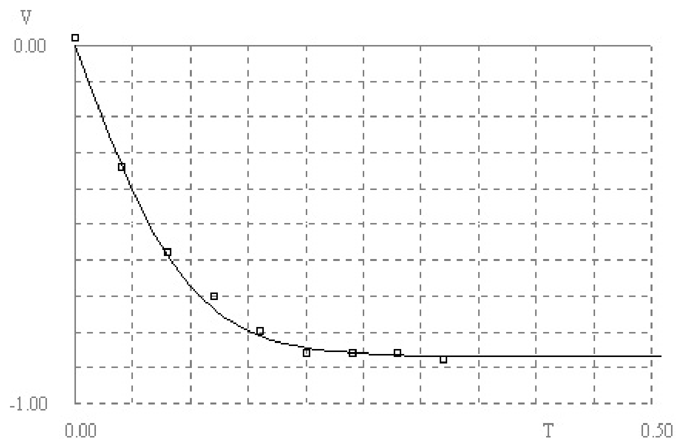
Die obige Abbildung zeigt außerdem, dass die Geschwindigkeit nach einiger Zeit (nahezu) konstant ist. Die Endgeschwindigkeit beträgt ungefähr - 0,87 m/s. Daraus ergibt sich für die Konstante k ein Wert von 0,046 kg/m.

7. Modellbildung

Aus dem Diagrammfenster von Easyvid starten wir das Modellbildungssystem ***Easysim***; dadurch werden die Messdaten von Easyvid automatisch an dieses Programm weitergereicht. Die Fallbewegung wird modelliert, die Startwerte und Parameter werden gemäß den vorangegangenen Überlegungen eingegeben:



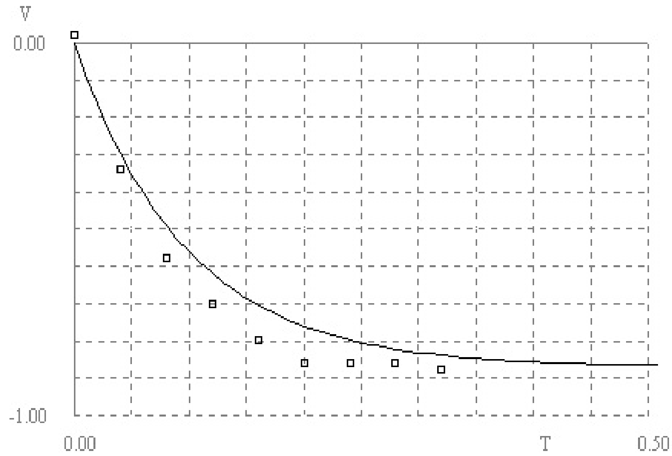
Das folgende *v*-*t*-Diagramm wurde mit diesem Modell berechnet; gleichzeitig sind die mit der Videoanalyse aufgenommenen Messwerte eingetragen.



Das Diagramm zeigt: Das Modell stimmt gut mit den Messdaten überein; insbesondere wird das Kraftgesetz für die Reibung bestätigt.

8. Anderes Modell für die Reibungskraft

Wenn bei der Fallbewegung der Kugel keine Wirbel in der Strömung auftreten, ist die Reibungskraft proportional zu v (Stokes'sches Gesetz). Ähnlich wie in Punkt 8 kann man wieder die Proportionalitätskonstante aus der Endgeschwindigkeit berechnen. Man erhält so $k = 0{,}040$ kg m / s. Das neue Modell liefert das folgende Diagramm:



Man erkennt: Das neue Modell deckt sich nicht so gut mit den experimentellen Ergebnissen wie das erste. Offensichtlich findet hier also eine Wirbelbildung statt.

9. Geschlossene Lösung der Bewegungsgleichung

Die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ lässt sich durch die Gleichung

$$m\dot{v} = -\Delta F + k v^2 \text{ mit } \Delta F = F_G - F_A$$

beschreiben. Diese Differenzialgleichung lässt sich explizit lösen: Separation der Variablen ergibt zunächst

$$dt = \frac{m\,dv}{-\Delta F + k v^2}$$

und die Integration liefert:

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{t_0} dt \\ &= \frac{m}{-\Delta F}\int_0^{v_0}\frac{dv}{1 - \frac{k v^2}{\Delta F}} \\ &= -\frac{m}{\sqrt{\Delta F \cdot k}}\int_0^{u_0}\frac{du}{1-u^2}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitution $u = \sqrt{\frac{k}{\Delta F}} \cdot v$ benutzt. Der letzte Integrand ist die

Ableitung von artanh(u). Also ist

$$t_0 = -\frac{m}{\sqrt{\Delta F \cdot k}} \cdot \operatorname{artanh}(u_0)$$

Auflösen nach u_0 und Resubstitution sowie Weglassen des Index 0 ergeben:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{\Delta F}{k}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\Delta F \cdot k}{m}} \cdot t\right)$$

Setzt man nun die oben angegebenen Werte ein, erhält man

$$\sqrt{\frac{\Delta F}{k}} = 0{,}870\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \text{sowie} \quad \frac{\sqrt{\Delta F \cdot k}}{m} = 9{,}83\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Der sich ergebende Graph sieht genauso aus wie bei Punkt 7.