

Paradoxon 4

Stromdurchflossener Leiter

In diesem Beitrag wollen wir die Auswirkungen des Relativitätsprinzips auf die Elektrodynamik untersuchen. Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Das ist die Kraft, die auf eine Ladung q wirkt, die sich mit der Geschwindigkeit v "durch" das elektrische Feld E und das magnetische Feld B bewegt.

Von besonderem Interesse ist jetzt der Fall $E = 0$ und $B \neq 0$. Dann reduziert sich (1) zu

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2)$$

Betrachten wir die Situation jetzt aus dem Ruhesystem der Ladung q , so ist dort die Geschwindigkeit 0. Nach (2) kann in diesem System also keine Lorentz-Kraft auf q wirken, die Kraft auf q ist also dort anscheinend gleich Null.

Dies steht im krassen Widerspruch zum Relativitätsprinzip. Wenn wir das Relativitätsprinzip weiterhin als gültig ansehen wollen, muss irgendetwas an unseren vorherigen Überlegungen falsch gewesen sein.

Zwei mögliche Fehlerquellen liegen nahe:

- a) Die Formeln (1) bzw. (2) sind falsch.
- b) E und B hängen vom Bezugssystem ab.

Nun haben sich (1) und (2) in jedem einzelnen Inertialsystem bisher bewährt, ja sie werden zur Definition von E und B herangezogen.

Dagegen ist eine mögliche Unabhängigkeit von E und B vom Bezugssystem nicht nachgewiesen. Deshalb wollen wir im folgenden davon ausgehen, dass die Gleichung (1) korrekt ist und sich nur E und B beim Übergang von einem System zum anderen ändern.

Eine leichte Korrektur wie z. B.

$$B' = \frac{B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Paradoxon 4

(oder Ähnliches) kommt hier nicht in Frage: Egal wodurch wir B in (2) ersetzen - die Lorentz-Kraft ist im System der Ladung q immer 0 N. Die Kraft auf die Ladung q kann in ihrem Ruhesystem nach (1) also nur durch ein elektrisches Feld E' erzeugt werden.

Wir wollen dies an einem einfachen Fall studieren: Durch einen langen stromdurchflossenen Leiter werde ein Magnetfeld B erzeugt, in welchem sich die Ladung q bewegen möge.

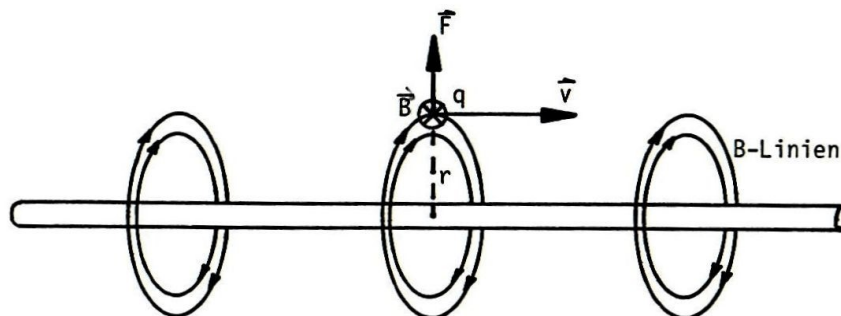


Abb. 1: Magnetfeld eines langen stromdurchflossenen Leiters ($q > 0$)

Um die späteren Rechnungen etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Ladung q dieselbe Geschwindigkeit v wie die Leiterelektronen besitzt. (Im Normalfall ist diese Geschwindigkeit dann einige Hundertstel mm/s, also sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit.)

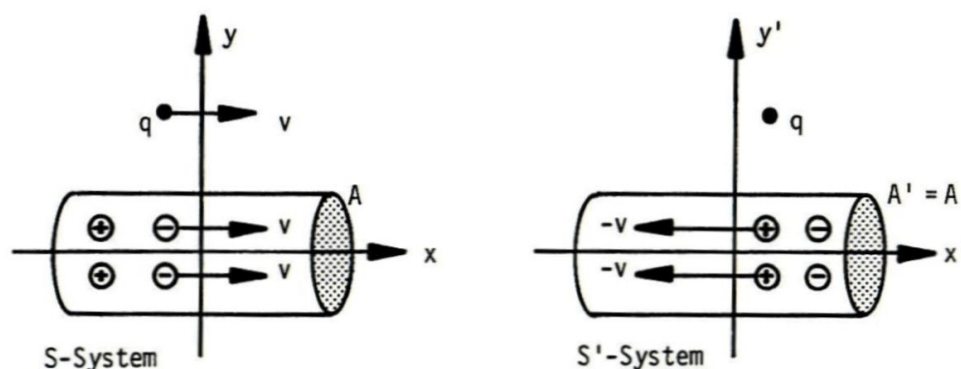


Abb. 2: Leiter und Ladung q in verschiedenen Systemen

In Abb. 2 ist links ein Teil eines zylinderförmigen Leiters gezeichnet, dessen Atomrümpfe (bzw. Kristallgitter) im System S ruhen mögen, während seine Leitungselektronen sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung bewegen. Die Ladungsdichte der positiv geladenen Atomrümpfe sei ρ_+ und die der Elektronen ρ_- (gemessen im S -System).

Es ist ein **experimentelles Faktum**, dass ein solcher stromdurchflossener Leiter elektrisch neutral ist; das bedeutet:

Paradoxon 4

$$\rho_{ges} = \rho_+ + \rho_- = 0 \quad (4)$$

Die beiden Ladungsdichten sind entgegengesetzt gleich groß.

Als nächstes betrachten wir dieselbe Situation im Inertialsystem S' , in dem neben der Ladung q die Elektronen ruhen und die positiv geladenen Atomrümpfe sich mit der Geschwindigkeit $-v$ (bzgl. der positiven x - bzw. x' -Richtung) parallel zur x' -Achse bewegen (vgl. rechten Teil von Abb. 2).

Wir hatten oben bereits erwähnt, dass im S' -System ein elektrisches Feld E' vorhanden sein muss. Die Existenz dieses Feldes ließe sich am einfachsten erklären, wenn der Leiter im S' -System nicht neutral wäre, also

$$\rho'_{ges} = \rho'_+ + \rho'_- \neq 0 \quad (5)$$

gelten würde.

Zur Berechnung von ρ'_{ges} muss man wissen, wie sich Ladungsdichten von einem Inertialsystem ins andere transformieren: Eine Ladung Q ruhe in S und nehme das Volumen V ein. Die Ruheladungsdichte, d.h. die Ladungsdichte der Ladung in ihrem Ruhesystem, ist definiert als $\rho = Q/V$. Nun misst ein Beobachter in S' **dieselbe** Ladungsmenge, denn die Ladung ist eine relativistische Invariante. Es gilt also

$$Q = Q' \quad (6)$$

Die Gleichung (6) lässt sich nicht herleiten, sondern beruht auf experimenteller Erfahrung.

Dagegen transformiert sich aufgrund der Längenkontraktion das Volumen V wie folgt:

$$V' = \Delta x' \cdot A' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot V \quad (7)$$

Also gilt für die Ladungsdichte:

$$\rho' = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \rho \cdot \gamma \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Wir halten fest:

Paradoxon 4

Für die Ladungsdichte gilt:

$$\rho(v) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \rho_0 \quad (9)$$

Dabei bezeichnet ρ_0 die Ruheladungsdichte und $\rho(v)$ die Ladungsdichte, wie sie von einem System S' gemessen wird, das sich mit einer Geschwindigkeit v gegenüber dem Ruhesystem bewegt.

Für die Ladungsdichten bei unserem Leiter ergeben sich daraus die Beziehungen:

$$\rho'_+ = \gamma \rho_+ \quad (\rho_+ \text{ ist Ruheladungsdichte}) \quad (10)$$

und

$$\rho'_- = \frac{1}{\gamma} \rho_- = -\frac{1}{\gamma} \rho_+ \quad (\rho'_- \text{ ist Ruheladungsdichte}) \quad (11)$$

Die Gesamtladungsdichte ρ'_{ges} ist somit:

$$\rho'_{ges} = \rho'_+ + \rho'_- = \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \rho_+ = \frac{v^2}{c^2} \gamma \rho_+ \quad (12)$$

Die Gesamtladungsdichte des Leiters ist im S' -System also tatsächlich von null verschieden; der Leiter ist in S' nach (12) positiv geladen und stößt die Probeladung q ab, so wie es auch in Abb. 1 zu sehen ist. Das ist beruhigend, aber manches ist doch befremdlich:

- Wo sollen z.B. die Ladungen herkommen, die den Leiter in S' nicht mehr neutral sein lassen?
- Wie kann es überhaupt geschehen, dass der Leiter in einem System neutral, im anderen geladen ist, waren wir doch von der Invarianz der Ladung ausgegangen?
- Vom Standpunkt der Kinematik und der Ladung her scheint der Übergang von S nach S' (bis auf eine hier unwesentliche Vertauschung der entsprechenden Vorzeichen) nur eine Vertauschung von Elektronen und Atomrümpfen zu bedeuten; das würde doch heißen, dass $\rho'_- = -\rho_+ = \rho_-$ gelten müsste - im Widerspruch zu (11)!

Alle diese (scheinbaren!) Widersprüchlichkeiten haben ihre Ursache in einer unzulänglichen Idealisierung, nämlich der Vorstellung vom "unendlichen" langen und geraden stromdurchflossenen Leiter!

In Wirklichkeit hat man es nämlich immer mit einem **geschlossenen Stromkreis** zu tun; jedem Elektron, das sich in positiver x -Richtung (im S -System) bewegt, entspricht ein Elektron, das

Paradoxon 4

sich in entgegengesetzter Richtung mit betragsmäßig gleicher Geschwindigkeit bewegt. (Dabei nehmen wir natürlicherweise an, dass die beiden Leiter identisch sind.) Betrachten wir der Einfachheit halber einen "rechteckigen" Stromkreis mit den Eckpunkten A, B, C und D (vgl. Abb. 3).

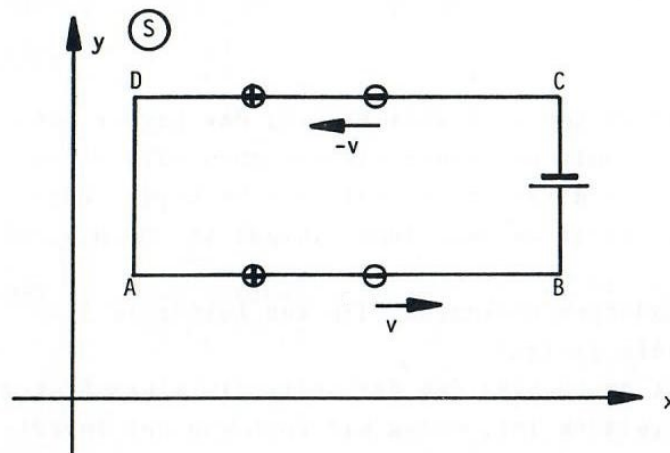


Abb. 3

Wieder sei das S-System das System, in welchem die Atomrümpfe im Leiterstück AB ruhen, während die Elektronen dort im S'-System ruhen sollen. Es ist jetzt klar, dass in diesem System S' die Elektronen im Leiterstück CD nicht ruhen (vgl. Abb. 4). Deshalb kann das obige Symmetrieargument (Vertauschbarkeit von Elektronen und Atomrümpfen) hier nicht greifen.

Wir werden jetzt zeigen, dass das Leitungsstück CD im S'-System die entgegengesetzte Ladung des Leiterstücks AB besitzt. (Die Ladung der Teilstücke AD und BC ist immer null.) Damit sind dann auch die restlichen Widersprüche und Fragen geklärt.

Es genügt jetzt also,

$$\rho'_{ges}(AB) + \rho'_{ges}(CD) = 0 \quad (13)$$

bzw.

$$\rho'_-(AB) + \rho'_-(CD) + \rho'_+(AB) + \rho'_+(CD) = 0 \quad (14)$$

nachzuweisen.

Das S-System ist das Ruhesystem der positiven Atomrümpfe; diese bewegen sich im S'-System sowohl auf AB als auch auf CD mit der Geschwindigkeit $-v$ (vgl. Abb. 4). Somit gilt:

$$\rho'_+(AB) = \rho'_+(CD) = \gamma \rho_+(AB) \quad (15)$$

Paradoxon 4

Die Elektronen auf AB ruhen in S'; es gilt wie oben:

$$\rho'_{-}(AB) = - \frac{\rho'_{+}(AB)}{\gamma} \quad (16)$$

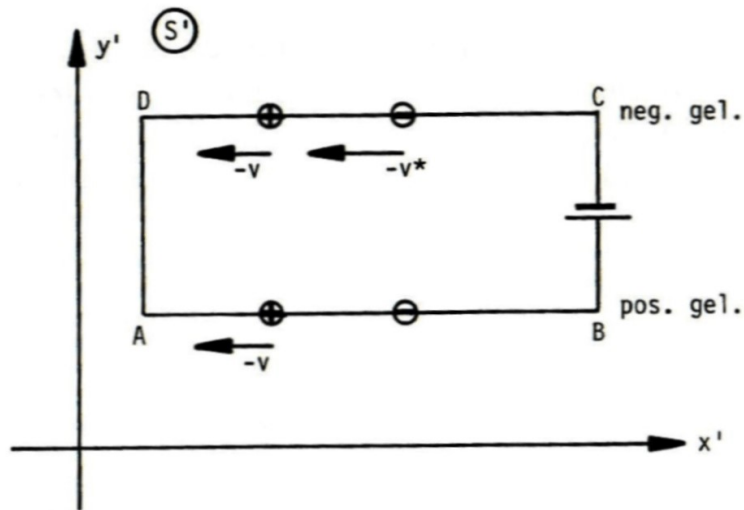


Abb. 4

Bei der Berechnung von $\rho'_{-}(CD)$ muss man etwas aufpassen: Von S aus gesehen bewegen sich die Elektronen mit der Geschwindigkeit $-v$, während sich S seinerseits **von S' aus betrachtet** ebenfalls mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt. Von S' aus gemessen bewegen sich daher die Elektronen auf CD nach dem **Additionstheorem** mit der Geschwindigkeit $-v^*$ (vgl. Abb. 4):

$$-v^* = \frac{(-v) + (-v)}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (17)$$

Mit der Bezeichnung

$$\gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} \quad (18)$$

gilt daher:

$$\rho'_{-}(CD) = \gamma^* \cdot \rho'_{-}(AB) = - \frac{\gamma^*}{\gamma} \cdot \rho'_{+}(AB) \quad (19)$$

Paradoxon 4

Zum Nachweis der Gleichung (14) genügt es somit, die Gleichung

$$-\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma^*}{\gamma} + 2\gamma = 0 \quad (20)$$

zu beweisen. Dies sei dem Leser als (einfache) Rechenaufgabe überlassen.

Quelle: Georg Heinrichs, Einstein und die Schwarzen Löcher, Aulis-Verlag Deubner, Köln, 1993